Universidad Simón Bolívar.
Matemáticas I (MA – 1111).
Enero – marzo 2015.
Christian Laya (christianlaya@gmail.com).

Primer examen parcial (30%)

1. Resuelva la siguiente inecuación:

$$\left|3+\frac{1}{2x-3}\right| \geq 1$$

Solución:

Por propiedades del valor absoluto, se tendrá que:

$$\left|3+\frac{1}{2x-3}\right| \geq 1 \Leftrightarrow 3+\frac{1}{2x-3} \leq -1 \ \text{ ó } \ 3+\frac{1}{2x-3} \geq 1$$

Resolviendo la primera inecuación:

$$3+\frac{1}{2x-3} \leq -1 \Rightarrow \frac{1}{2x-3}+4 \leq 0 \Rightarrow \frac{1+4(2x-3)}{2x-3} \leq 0 \Rightarrow \frac{8x-11}{2x-3} \leq 0$$

Realizamos el correspondiente estudio de signos:

	$\left(-\infty,\frac{11}{8}\right]$	$\left[\frac{11}{8},\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$
$8x-11$	$-$	$+$	$+$
$2x-3$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$

$$\mathbf{Sol_1} = x \in \left[\frac{11}{8},\frac{3}{2}\right)$$

Para la segunda inecuación se tiene:

$$3+\frac{1}{2x-3} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{2x-3}+2 \geq 0 \Rightarrow \frac{8x-5}{2x-3} \geq 0$$

Realizamos el correspondiente estudio de signos:

	$\left(-\infty,\frac{5}{8}\right]$	$\left[\frac{5}{8},\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$
$8x-5$	$-$	$+$	$+$
$2x-3$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$

$$\mathbf{Sol_2} = x \in \left\{\left(-\infty, \frac{5}{8}\right] \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)\right\}$$

La solución será:

$$\mathbf{Sol} = \mathbf{Sol_1} \cup \mathbf{Sol_2} = x \in \left\{\left(-\infty, \frac{5}{8}\right] \cup \left[\frac{11}{8}, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)\right\}$$

2. Dada la recta $l \equiv 4x - 3y + 18 = 0$ y el punto A(5,-4).

- Halle la ecuación de la recta l_1, paralela a l, que pasa por A.
- Halle la ecuación de la circunferencia que pasa por A y es tangente a las dos rectas l y l_1.

<u>Solución</u>:

Escribamos la recta l en forma explícita en y:

$$4x - 3y + 18 = 0 \Longrightarrow y = \frac{4}{3}x + 6$$

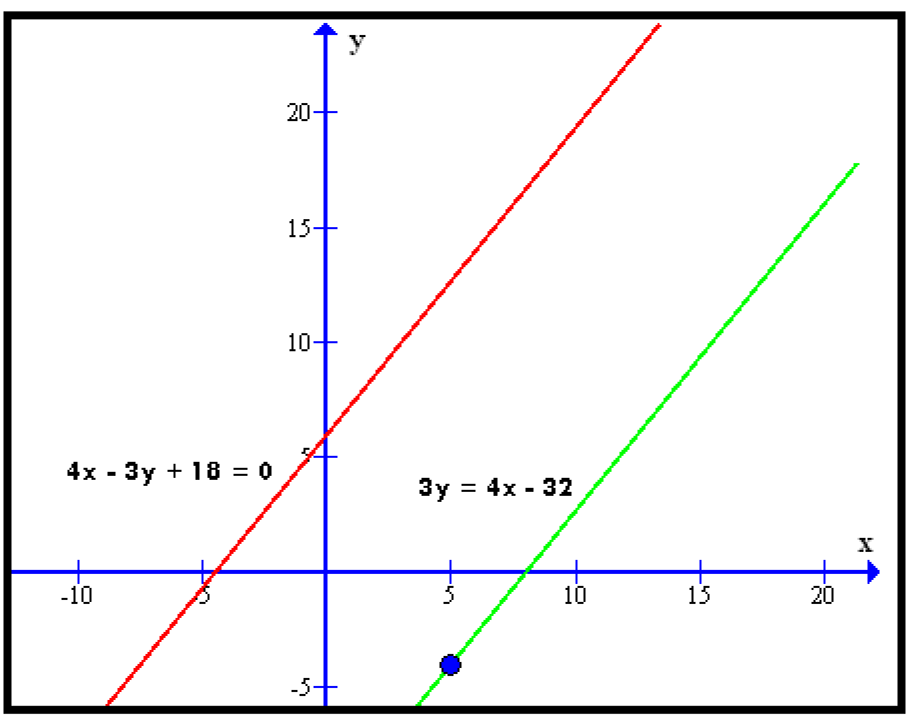
Así:

$$m_l = m_{l_1} = \frac{4}{3}$$

Por ser paralelas. Como l_1 pasa por A, se tendrá:

$$l_1 \equiv 3y - 4x + 32 = 0$$

Hagamos un gráfico de la situación:



Podemos trazar una recta k que sea perpendicular a l y que pase por A, en tal caso, dicha recta tendrá pendiente:

$$m_k = -\frac{1}{m_l} = -\frac{3}{4}$$

La recta k tendrá ecuación:

$$k \equiv 4y + 3x + 1 = 0$$

Ahora bien, busquemos la intersección entre las rectas l y k:

$$4x - 3y + 18 = 0 \qquad \text{y} \qquad 4y + 3x + 1 = 0$$

Obteniéndose así el punto B(-3,2).

La distancia de A a B será el diámetro de la circunferencia y el punto medio entre estos será el centro.

$$d = \sqrt{(-3-5)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

El radio de la circunferencia será $r = 5$.

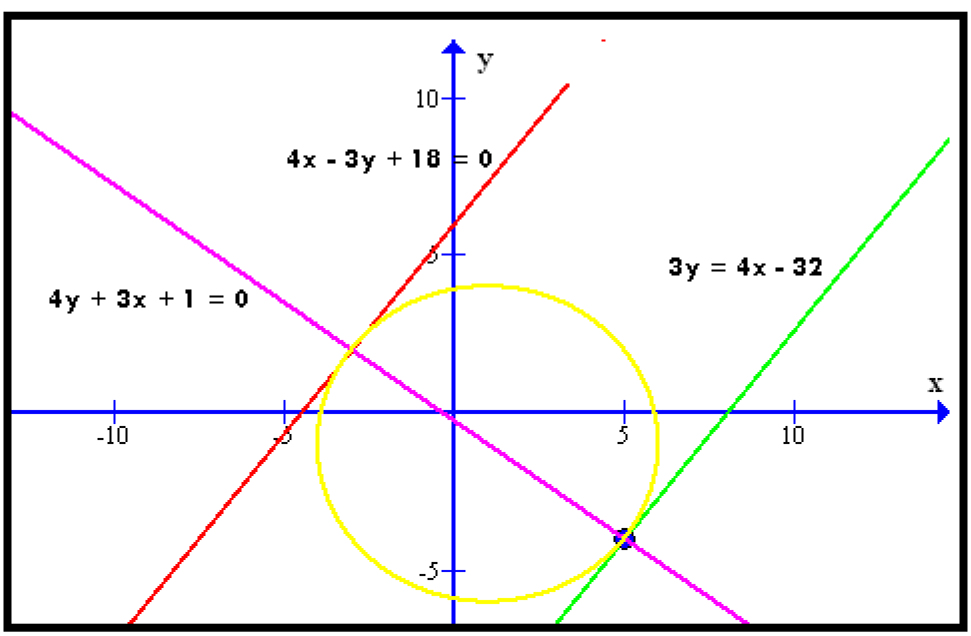
El centro vendrá dado por:

$$c = \left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2-4}{2}\right) = (1, -1)$$

La ecuación de la circunferencia será:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$$

Gráficamente se ve como:



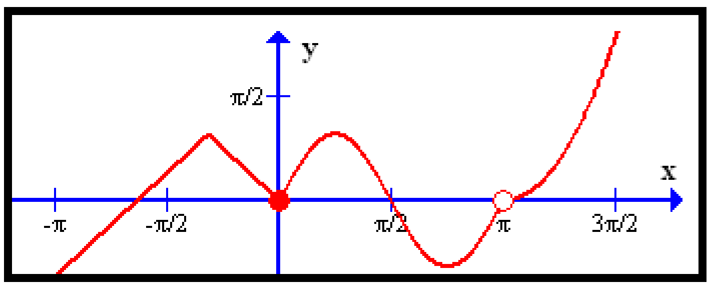
3. Dada las funciones:

$$f(x) = \pi - \sqrt{x}, \qquad g(x) = \begin{cases} 1 - |x+1|, & si\ x \le 0 \\ sen(2x), & si\ 0 < x < \pi \\ (x-\pi)^2, & si\ x > \pi \end{cases}$$

- Bosqueje el gráfico de g, determine su dominio y rango.
- Halle $g \circ f$ y determine su dominio.

Solución:

El gráfico de g será:



De la gráfica se observa que la función en x toma todos los valores en la recta real menos 0 y pi:

$$\mathbf{Dom}f = \mathbb{R} - \{\pi\}$$

La función en el eje y, por su parte, toma todos los valores del conjunto, por ende:

$$\mathbf{Rgo}f = \mathbb{R}$$

Para hallar la composición, debemos determinar si $\mathbf{Rgo}f \cap \mathbf{Dom}g \neq \emptyset$, en efecto:

$$\mathbf{Rgo}f \cap \mathbf{Dom}g = (-\infty, \pi] \cap \big((-\infty,\pi) \cup (\pi, +\infty)\big) = (-\infty, \pi) \neq \emptyset$$

Lo cual nos garantiza que la composición es válida.

$$g \circ f = \begin{cases} 1 - |f(x)+1|, & si\ x \in e_1 \\ sen\big(2 \cdot f(x)\big), & si\ x \in e_2 \\ (f(x)-\pi)^2, & si\ x \in e_3 \end{cases} = \begin{cases} 1 - \left|\pi - \sqrt{x} + 1\right|, & si\ x \in e_1 \\ sen\left(2\left(\pi - \sqrt{x}\right)\right), & si\ x \in e_2 \\ \left(\pi - \sqrt{x} - \pi\right)^2, & si\ x \in e_3 \end{cases}$$

Donde:

$$e_1 = \begin{cases} \mathbf{Dom}f \\ f(x) \in \mathbf{Dom}g_1 \end{cases} = \begin{cases} x \ge 0 \\ \pi - \sqrt{x} \le 0 \end{cases} = \begin{cases} x \ge 0 \\ \pi^2 \le x \end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$e_1 = [\pi^2, +\infty)$$

Ahora:

$$e_2 = \begin{cases} \mathbf{Dom} f \\ f(x) \in \mathbf{Dom} g_2 \end{cases} = \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 < \pi - \sqrt{x} < \pi \end{cases} = \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 < \sqrt{x} < \pi \end{cases} = \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 < x < \pi^2 \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos:

$$e_2 = (0, \pi^2)$$

Por último:

$$e_3 = \begin{cases} \mathbf{Dom} f \\ f(x) \in \mathbf{Dom} g_3 \end{cases} = \begin{cases} x \geq 0 \\ \pi - \sqrt{x} > \pi \end{cases} = \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} < 0 \end{cases}$$

Hallando la intersección se tendrá que:

$$e_3 = x \in \emptyset$$

Finalmente:

$$g \circ f = g\big(f(x)\big) = \begin{cases} sen\left(2\left(\pi - \sqrt{x}\right)\right), & si\ 0 < x < \pi^2 \\ 1 - \left|\pi - \sqrt{x} + 1\right|, & si\ x \geq \pi^2 \end{cases}$$

4. Diga si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:

- El dominio de la función $f(x) = \frac{x+3}{x(x^2-9)}$ es $\mathbb{R} - \{0,3\}$.
- Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función par, entonces f no puede ser una función inyectiva.
- La inversa de la función $f(x) = \frac{1}{1-x} + 2$ es la función $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{x-2}$.

<u>Solución</u>:

Para la primera proposición observamos que la función tendrá sentido si y sólo si $x(x^2 - 9) \neq 0$, esto es:

$$x \neq 0 \quad \text{y} \quad x^2 - 9 \neq 0 \Longrightarrow x \neq \pm 3$$

A lo cual, el dominio de la función será:

$$\mathbf{Dom} f = \mathbb{R} - \{-3,0,3\}$$

Concluyendo así que la proposición es falsa.

Ahora bien, estudiemos la segunda proposición. Sabemos que una función par es aquella que tiene simetría con el eje y, gráficamente, la función tendrá, para un valor de y, dos valores de x, descartando así que ésta sea inyectiva.

Un ejemplo de esto, es la función $f(x) = x^2$ o $f(x) = |x|$, las cuales son simétricas con respecto al eje y.

Así pues, se concluye que la segunda proposición es verdadera.

Para la última proposición, calculemos la inversa analíticamente. Para ello, debemos determinar si f es inyectiva:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

$$\frac{1}{1-a} + 2 = \frac{1}{1-b} + 2 \Rightarrow \frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-b} \Rightarrow 1 - b = 1 - a \Rightarrow a = b$$

Con lo que queda demostrado que f es inyectiva.

Determinemos la inversa:

$$y = \frac{1}{1-x} + 2 \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{1-x} \Rightarrow 1 - x = \frac{1}{y-2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{y-2} = x$$

Haciendo el cambio $x = y$ se obtiene:

$$f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x-2} = \frac{x-3}{x-2}$$

Resultando así que la última proposición es verdadera.